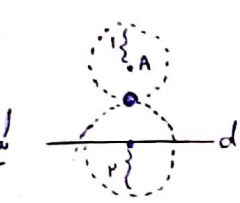
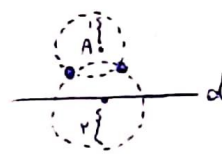
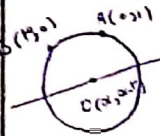
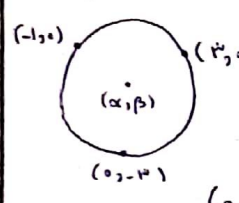


ردیف	شرح سوالات	بارم
۱	اگر دو ماتریس $A = [2i - j]_{2 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} x + 2y & 0 \\ 3 & x + y \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند، مقدار $x - y$ را بیابید. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & 0 \\ 3 & x+y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ -x-y=-2 \end{cases}$ $y = -1 \Rightarrow x = 3$ $x - y = 3 - (-1) = 4$	۱
۲	ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت‌های زیر تعریف شده‌اند، حاصل $2A - 3B$ را به دست آورید. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ 1 & i = j \\ j-1 & i > j \end{cases}, \quad b_{ij} = \text{Max}\{i, j\}$ $2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -4 & -2 & 1 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix}$	۱/۵
۳	ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس $A^T - A^2$ را محاسبه کنید. $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ $A^2 = (A^T)^T = I^T = I$ $A^T - A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ $A^T = (A^T)^T \times A = I \times A = A$	۱
۴	اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $-2AX = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ ماتریس X را تعیین کنید. $-2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $(-2A)^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ 0 & -\frac{4}{14} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ 0 & -\frac{4}{14} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{14} & -\frac{16}{14} \\ -\frac{16}{14} & \frac{16}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	۱/۷۵
۵	مقدار دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ برابر ۲- می‌باشد، دترمینان ماتریس $-5A$ چقدر است؟ $A = -2$ $-5A = (-5)^3 A = -125 \times -2 = 250$	۰/۵

۶	۰/۷۵ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند، دترمینان ماتریس $B^T A$ را به دست آورید. $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1(24) - 0 - 0 = -24$
۷	۱ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مفروضند. حاصل $2 A+B $ و $ AB $ را تعیین کنید. $ A = -3 - 2 = -5$ $ B = 14 - 3 = 11$ $ AB = A B = -5 \times 11 = -55$ $ A+B = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18 \Rightarrow 2 A+B = 36$
۸	۱/۵ اگر $(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، درایه a_{21} در ماتریس A^T چه عددی است؟ $((A - 2I)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - 2I = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $a_{21} = 3$
۹	۰/۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & n \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$ داشته باشیم و $AB = BA$ ، در اینصورت مقادیر m و n را محاسبه کنید. $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n \\ 9 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4m+27 & 4n-21 \\ -3m+28 & -3n-28 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} m & n \\ 9 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4m-3n & 3m+4n \\ 36-7n & -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} -3m+34 = 57 \Rightarrow -3m = 23 \Rightarrow m = -\frac{23}{3} \\ -3n-28 = -1 \Rightarrow -3n = 27 \Rightarrow n = -9 \end{cases}$
۱۰	کامل کنید: ۱/۲۵ الف) اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A برابر است با $\frac{1}{\det(A^{-1})} = \frac{1}{-13}$. ب) اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + my = 4 \\ x + y - m = 0 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مقدار m برابر است با 2 . ج) صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی دوار عمود است و از رأس آن نمی‌گذرد، مقطع حاصل $\dots\dots\dots$ می‌باشد. د) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع l و l' به یک فاصله‌اند $\dots\dots\dots$ است. ه) مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی با شعاع ثابت R که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه‌ی این دایره، مماس خارج‌اند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\dots\dots\dots$ می‌باشد.

۱۱	نقطه‌ای A و خط d در صفحه مفروض اند، نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر و از d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشد؟ فاصله A تا d کمتر از ۳ سانتی‌متر  فاصله A تا d برابر با ۳ سانتی‌متر  فاصله A تا d بیشتر از ۳ سانتی‌متر 
۱۲	معادله دایره‌ای را بنویسید که از دو نقطه (۰, ۱) و (۳, ۰) گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ باشد. $O(\alpha, \alpha - 2)$  $(3-\alpha)^2 + (0-\alpha+2)^2 = (0-\alpha)^2 + (1-\alpha+2)^2$ $9 - 6\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha + 2 = \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 \Rightarrow -2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = 3$ $O(1, -1)$ $R^2 = (1-0)^2 + (-1-1)^2 = 1 + 2 = 5$ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$
۱۳	مساحت دایره‌ای گذرنده از نقاط $A(-1, 0)$، $B(3, 0)$ و $C(0, -2)$ را بدست آورید.  $(-1-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 = (3-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 \Rightarrow$ $1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 9 - 6\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow 2\alpha + 4\alpha = 9 - 1 \Rightarrow 8\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 1$ $(0-\alpha)^2 + (-2-\beta)^2 = (-1-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 \Rightarrow 1 + 9 + 4\beta + \beta^2 = 2 + \beta^2 \Rightarrow 4\beta = -9 \Rightarrow \beta = -1$ $O(1, -1)$ $R^2 = (-1-1)^2 + (0+1)^2 = 2 + 1 = 5$ $S = \pi R^2 = 5\pi$
۱۴	وضعیت نسبی دو دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 2$ و $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید. $O_1 = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1, -1)$ $R_1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2c}}{2} = \frac{\sqrt{2 + 2 - 0}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ $O_2 = (0, 0)$ $R_2 = \frac{\sqrt{0 + 0 - 2(-2)}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ $O_1 O_2 = \sqrt{(0+1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$ $R_2 - R_1 < O_1 O_2 < R_1 + R_2$ <i>مقاطع</i>

۱۵ اگر نقطه $A(m, m-1)$ داخل دایره‌ی $x^2 + y^2 = 5$ باشد، حدود m را تعیین کنید.

$$O = (0, 0)$$

$$R = \frac{\sqrt{0+0-2(-5)}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OA^2 = (0-m)^2 + (0-m+1)^2 = m^2 + m^2 - 2m + 1 \Rightarrow OA = \sqrt{2m^2 - 2m + 1}$$

$$R > OA \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} > \sqrt{2m^2 - 2m + 1} \Rightarrow 5 > 2m^2 - 2m + 1 \Rightarrow 2m^2 - 2m - 4 < 0 \Rightarrow \sqrt{2(m^2 - m - 2)} < 0$$

از این بابت

۱۶ مقدار m را چنان تعیین کنید که معادله‌ی $(m^2 - 7)x^2 + 2y^2 + 4x + m = 0$ یک دایره باشد.

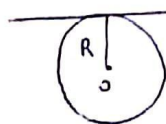
$$m^2 - 7 = 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

$$a^2 + b^2 - 2ac > 0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 \Rightarrow 19 + 0 - 12 > 0 \Rightarrow 7 > 0 \checkmark \\ m=-3 \Rightarrow 19 + 0 - 2(-3) > 0 \Rightarrow 25 > 0 \checkmark \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{هر دو جواب قابل قبول اند} \end{array} \right.$$

۱۷ خط به معادله‌ی $3x - 4y - a = 0$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ مماس است، a را تعیین کنید.

$$O = (2, -3)$$

$$R = \frac{\sqrt{19 + 36 - 19}}{2} = \frac{5}{2}$$



$$3x - 4y - a = 0$$

$$\psi = \frac{|4 + 12 - a|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow \psi = \frac{|16 - a|}{5} \Rightarrow |16 - a| = 15 \Rightarrow 16 - a = \pm 15 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 31 \end{cases}$$

$$r(m^2 - m - 2) < 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{-c}{a} = 2 \end{cases}$$

$$-1 < m < 2$$

m	-1	2
(m+1)	-	+
(m-2)	-	-
مجموع	+	+

موفق و سربلند باشید.